Intégration

M1 – Chapitre 4

I. Propriétés

1. Relation de Chasles

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

2. Linéarité

$$\int_a^b \lambda f(x) + g(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

3. Conservation de l'ordre

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

II. Théorème de Leibniz-Newton

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b} = F(b) - F(a)$$

III. Valeur moyenne

$$\boxed{\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}$$

IV. Intégration par parties

$$\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx}$$

V. Fonction a valeurs complexes

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \mathrm{Re}(f(x))\,dx + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(x))\,dx$$

VI. Changement de variable

$$\boxed{\int_a^b f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,dx = \int_{f(a)}^{f(b)} f(t)\,dt \qquad t = \varphi(x)}$$

Règle de Bioche :

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

- Si $f(x)dx$ invariant quand $x \to -x$, $U = \cos x$
- Si $f(x)dx$ invariant quand $x \to \pi - x$, $U = \sin x$
- Si $f(x)dx$ invariant quand $x \to \pi + x$, $U = \tan x$
- Sinon, $t = \tan\frac{x}{2}$

VII. Approximation d'une intégrale

$$\boxed{S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \to \int_a^b f(x)\,dx}$$

VIII. Inégalité de la moyenne

$$m = \min_{[a;b]} f(x) \quad M = \max_{[a;b]} f(x)$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

IX. Formules de primitives

$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{F(x)}$
$u'u^\alpha$ $u'\sqrt[n]{u} = u'u^\alpha \quad \alpha = \frac{1}{n}$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$
$u'e^u$	e^u
$u'g \circ u$	$G \circ u$
$u' \cos u$	$\sin u$
$u' \sin u$	$-\cos u$
$\frac{u'}{\cos^2 u}$	$\tan u$
$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arccos u$
$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arcsin u$
$\frac{u'}{1+u^2}$	$\arctan u$